НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 13

7 АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

В предыдущем разделе мы рассмотрели методы исследования устойчивости невозмущенного движения конкретных систем с конкретными параметрами. Однако на практике параметры системы всегда известны неточно и подвержены изменениям. Естественно, возникает потребность иметь такие методы исследования, которые гарантировали бы устойчивость в некоторой области изменении параметров системы.

Конечно, можно повторить исследования при разных значениях параметров и, таким образом, выяснить чувствительность системы к изменению параметров, это часто и делается. Но это громоздко и часто ненаглядно. Хотелось бы иметь методы, которые сразу гарантировали бы устойчивость в некоторой области изменении параметров системы.

В теории линейных систем системы, устойчивые в некотором диапазоне параметров, называются робастно устойчивыми. Разрабатывается теория таких систем.

Если система нелинейная и нам нужно исследовать устойчивость в некотором классе нелинейностей, то такая устойчивая система называется абсолютно устойчивой. Определение мы уже рассматривали. Итак, напомним:

Система называется абсолютно устойчивой, если она асимптотически устойчива при любом характере нелинейности внутри определенного класса нелинейностей.

Напомним другие определения: невозмущенное движение системы называется асимптотически устойчивым, если система устойчива по Ляпунову и со временем $\tilde{x} \to 0$.

Если система асимптотически устойчива при любых начальных значениях, она называется устойчивой в целом.

7.1 Прямой метод Ляпунова исследования абсолютной устойчивости

Впервые задача об абсолютной устойчивости была рассмотрена советским ученым А.И. Лурье. Им же был разработан метод решения этой задачи, основанный на построении функции Ляпунова. В 1961г румынский ученый В.М. Попов опубликовал работу, в которой изложил частотный метод решения этой проблемы. Это повлекло за собой появление большого потока работ в этом направлении.

Мы рассмотрим общие положения, затронем применение прямого метода Ляпунова и затем частотный метод Попова.

Рассмотрим, как и ранее, систему, содержащую линейную часть и один нелинейный элемент. Структура системы показана на рисунке 7.1.

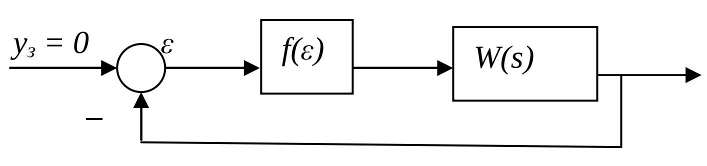

Рисунок 7.1 – Типовая структурная схема нелинейной САР

Здесь $f(\varepsilon)$ – характеристика нелинейного элемента;

W(s) – передаточная функция линейной части.

В пространстве состояний система с одной регулируемой переменной *y* и одним управляющим воздействием *u* описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu; \tag{7.1}$$

$$y = Cx \ ; \tag{7.2}$$

$$u = f(\varepsilon) \ , \ \varepsilon = \ y_з - y = -y. \tag{7.3}$$

Здесь *x* – вектор переменных состояния;

A, B, C – матрицы соответствующих размерностей.

Передаточную функцию *W(s)* из (7.1), (7.2) можно получить по формуле

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B, \tag{7.0}$$

где I – диагональная единичная матрица.

Предположим, что нелинейная функция проходит через нуль и удовлетворяет следующим условиям

$$f(0) = 0 \ ; \ k_{\min}\varepsilon \le f(\varepsilon) \le k_{\max}\varepsilon \tag{7.4}$$

Условие (7.4) задает класс нелинейных функций. Это условие можно графически интерпретировать, как требование расположения нелинейности в секторе (в угле), образованном прямыми $u = k_{\min}\varepsilon$; $u = k_{\max}\varepsilon$. Обозначим этот сектор, как сектор [$k_{\min}, k_{\max}$]. Это изображено на рисунке 7.2.

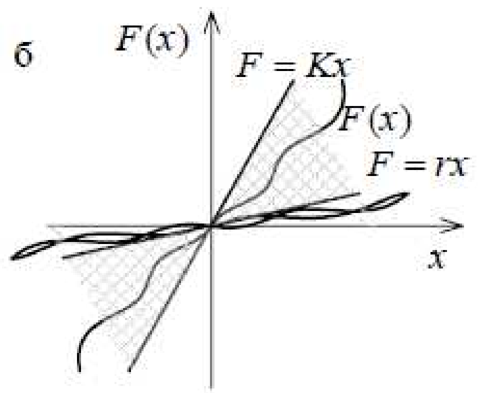

Рисунок 7.2 – Сектор для нелинейной характеристики. Здесь сектор образован прямыми *F=Kx*; *F=rx*. В секторе находится одна нелинейность *F(x)*

Уравнения системы можно представить в области изображений в виде

$$y = W(s)u \ ; \ u = f(\varepsilon) \ ; \ \varepsilon = -y \tag{7.5}$$

Наряду с системой (7.5) рассмотрим линейную систему

$$y = W(s)u \ ; \ u = k\varepsilon \ ; \ \varepsilon = -y \ , \tag{7.6}$$

где k изменяется в пределах $k_{\min} \le k \le k_{\max}$, то есть в секторе [$k_{\min}, k_{\max}$].

Эту систему назовем системой сравнения для нелинейной системы (7.5).

Таким образом, *системой сравнения для нелинейной системы называется линейная система, в которой нелинейный элемент заменен усилительным звеном, коэффициент усиления которого изменяется в заданных пределах в секторе* [$k_{\min}, k_{\max}$].

Звено $u = k\varepsilon$ является частным случаем нелинейного звена $u = f(\varepsilon)$, поэтому, если нелинейная система (7.5) абсолютно устойчива в секторе [$k_{\min}, k_{\max}$], то ее система сравнения устойчива при $k_{\min} \le k \le k_{\max}$. И наоборот, если система сравнения при каком-либо k неустойчива, то нелинейная система (7.5) не может быть абсолютно устойчивой в секторе [$k_{\min}, k_{\max}$].

Из этого следует утверждение: *Необходимым условием абсолютной устойчивости нелинейной системы в секторе* [$k_{\min}, k_{\max}$] *является устойчивость ее системы сравнения в том же секторе* [$k_{\min}, k_{\max}$].

Возникает вопрос, не является ли необходимое условие устойчивости и достаточным. Но выяснилось, что ответ – отрицательный.

Поэтому задачу абсолютной устойчивости решали, используя прямой метод Ляпунова. Методика решения разработана, как об этом уже говорилось, Лурье. По методу Лурье функция Ляпунова ищется в виде

$$V(x) = x^T Q x + q\int_0^{\varepsilon} f(\varepsilon)d\varepsilon, \qquad (7.7)$$

где Q – положительно определенная матрица, q – положительное число. Задача сводится к определению таких Q и q, при которых производная по времени в силу уравнений системы будет отрицательно определенной функцией, а функция $V(x)$ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании $|x|$ [4]. Более подробно с применением прямого метода Ляпунова для решения задачи определения абсолютной устойчивости нелинейных систем можно ознакомиться по литературе [4] и др.

7.2 Частотный метод исследования абсолютной устойчивости

С 60-х годов прошлого века, после появления работы Попова, стал широко использоваться частотный метод решения задачи абсолютной устойчивости. Рассмотрим коротко этот метод. Считаем, что линейная часть системы устойчива.

Для применения частотного метода, естественно, используется передаточная функция линейной части, то есть в виде (7.5). Рассмотрим критерий Попова. Для этого представим АФХ линейной части в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \qquad (7.8)$$

Критерий Попова: *Для того, чтобы положение равновесия системы* (7.6) *с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в секторе* [0, k], *достаточно, чтобы существовало такое вещественное число q, что при всех ω>0 выполняется неравенство*

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}. \qquad (7.9)$$

Находит применение также другая форма критерия Попова, приспособленная для графических построений АФХ.

Для ее формулировки введем в рассмотрение следующие обозначения

$$V_M(\omega) = \omega V(\omega). \quad W_M(j\omega) = U(\omega) + jV_M(\omega). \tag{7.10}$$

Функция $W_M(j\omega)$ называется модифицированной АФХ. Ее график имеет тот же вид, что и исходной характеристики, но отличается масштабом по мнимой оси.

Используя обозначение $V_M(\omega)$, неравенство (7.9) запишется в виде

$$U(\omega) - qV_M(\omega) > -\frac{1}{k}. \tag{7.11}$$

Если построить на плоскости (U, V_M) прямую

$$U - qV_M = -\frac{1}{k}, \tag{7.12}$$

называемую прямой Попова, то установлено, что неравенство (7.11) будет выполняться, если модифицированная АФХ располагается правее прямой Попова. В (7.12) U, V_M – действительная и мнимая координатные оси. Прямая Попова пересекает действительную ось в точке $-1/k$ и имеет крутизну наклона $1/q$.

Тогда частотная формулировка критерия Попова следующая: *для того, чтобы положение равновесия системы* (7.6) *с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в секторе* [0, k], *достаточно, чтобы можно было провести прямую, проходящую через точку* ($-1/k$, $j0$) *такую, что модифицированная АФХ полностью располагается правее этой прямой.*

Это изображено на рисунке 7.3.

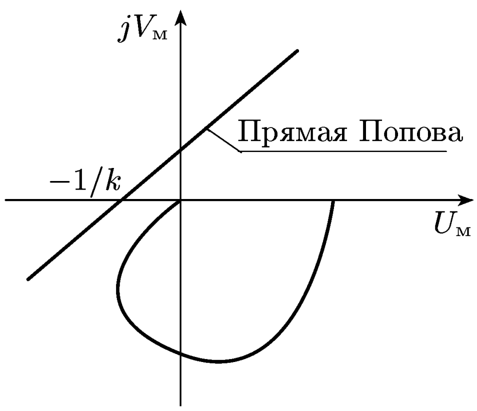

Рисунок 7.3 – Модифицированная частотная характеристика и прямая Попова

Как выяснить устойчивость линейной части? Например, по критерию Гурвица.

<u>Пример (взят из [4]).</u> Пусть передаточная функция линейной части имеет вид

$W(s) = 1/(s+1)^3$. Исследовать, является ли система на рисунке 7.1 абсолютно устойчивой в угле [0, 3].

Р е ш е н и е. Легко проверить, что необходимое условие абсолютной устойчивости выполняется (см. пример 5.1). На рис. 5.3 представлена амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части.

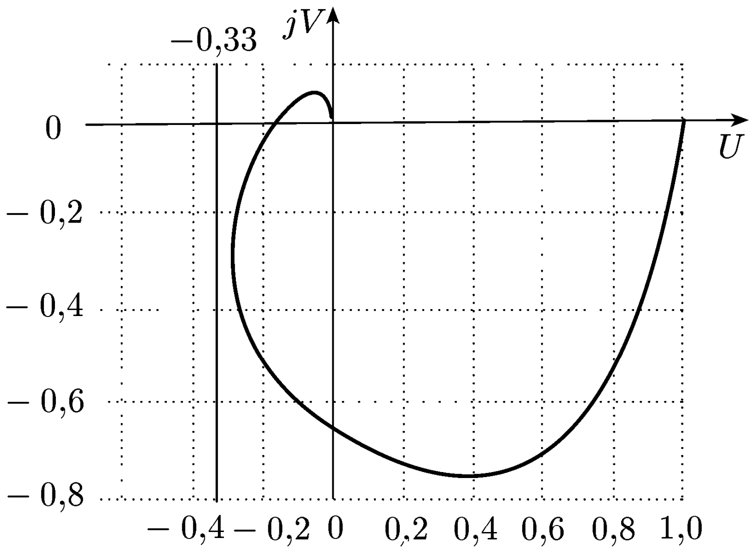

Рис. 5.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (к примеру 5.3)

Она расположена правее прямой Попова — прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $-0{,}33$ и параллельной оси ординат. Так как модифицированная частотная характеристика отличается от приведенной только по оси ординат, то и она будет располагаться правее этой прямой. Следовательно, система абсолютно устойчива в угле $[0, 3]$.

Если линейная часть неустойчива, то ее можно преобразовать, не изменяя системы в целом, так, чтобы эта часть стала устойчивой. Как это сделать? Один из способов – охватить линейную часть отрицательной обратной связью с передаточной функцией $W_{OC}(s)$ и одновременно параллельно нелинейному элементу подключить звено с этой же передаточной функцией. Причем $W_{OC}(s)$ выбираем так, чтобы в целом линейная часть стала устойчивой. Можно установить, что получаем систему, эквивалентную исходной системе.

Порядок исследования абсолютной устойчивости системы частотным методом Попова:

1) проверяем линейную часть системы на устойчивость;

2) находим выражение для АФХ линейной части, выделяем в нем действительную и мнимую части;

3) находим выражение для модифицированной АФХ линейной части;

4) строим модифицированную АФХ линейной части на комплексной плоскости;

5) строим прямую Попова, максимально приближенную к АФХ слева так, чтобы модифицированная АФХ полностью располагалась правее этой прямой.

6) определяем сектор абсолютной устойчивости.